

# 拡散ロジスティック・モデルの応用

## ——佐賀市への通勤者数の分析——

常 盤 洋 一

### 目 次

1. はじめに
2. 拡散ロジスティック・モデルの導出
3. シミュレーションとパラメータの推定
4. 佐賀市への通勤者数の分析
5. まとめ

### 1. はじめに

自然現象における拡散は、広く知られている。1箇所に集中していた物体、あるいは個体がでたらめの方に動き出し(ランダムウォーク)、方々へ散らばっていくのが拡散である。数理生態学の分野では散らばった個体が繁殖し、ロジスティック・モデルにしたがって個体数が増加するモデルが示されている。

ここで自然科学から社会科学に目を転じよう。Hagerstrand (1953) は、新しい事物・技術・現象の導入と、それによる変化を変革 (innovation) と呼び、変革が空間の中で伝播していく過程を拡散過程と捉えた。そしてモンテカルロ・シミュレーションによって統計実験的に再現し、変革の空間的な拡散についての理論構成を行っている。筆者は、以前に通勤移動の連鎖的な拡散について確率過程の見地で研究したが (常盤, 1985), ここで原点に戻って、拡散ロジスティック・モデルで通勤者数の分析をしようと考えた。

ここで重要なのは、シミュレーションの結果が現状に合致することではなく、モデルのパラメータの推定と予測によって、現象の実態と将来について社会科学的見地から提言を述べることである。地方都市圏においてはモータ

リゼーションが進行し、産業の成長が緩やかであるにもかかわらず通勤者数の増加が続いている。これはロジスティック・モデルに沿った周辺市町村からの通勤者の増加と、従業地である中心都市を基点とした常住地の拡散と考えられる。本研究では拡散ロジスティック・モデルを現実のデータに当てはめる技法を求め、佐賀市都市圏を対象とした分析と予測を行う。

## 2. 拡散ロジスティック・モデルの導出

参考文献に示すように、生態学では拡散について多くの研究がなされている。その中で最もオーソドックスな方法で拡散ロジスティック・モデルを導出する。なお、簡略化のため、ここでは1次元で導出する。

1次元の座標軸を  $x$  とし、その軸を  $\Delta x$  の幅で区切る。このとき  $x$  は離散値をとり、区切られた区間を示すものとする。時点  $t$  とし、時点  $t$  に座標  $x$  の区間にいる個体数を  $P(t, x)$  とする。そして時点の間隔を  $\Delta t$  とする。ここで個体はランダムウォークをするものとして、個体が隣の区間へ移る確率を  $\alpha$  とすると、時点  $t + \Delta t$  における区間  $x$  の個体数は

$$P(t + \Delta t, x) = (-2\alpha)P(t, x) + \alpha\{P(t, x + \Delta x) + P(t, x - \Delta x)\} \quad (2.1)$$

に変化する。

式(2.1)の両辺をテイラー展開する。なお、煩雑なため  $P(t, x)$  を  $P$  と略記する。

$$\begin{aligned} P + \frac{\partial P}{\partial t} \Delta t &= P - 2\alpha P + \alpha \left[ \left\{ P + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ P - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \right\} \right] \\ &= P + \alpha (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha (\Delta x)^2}{\Delta t} = D \quad (2.3)$$

となるような極限をとると、拡散方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

を得る。 $D$  は拡散係数と呼ばれている。

拡散方程式は、ラプラス変換によって解くことができる (宇野・洪, 1974, pp.197~200)。初期条件を  $P(0, x) = P_0(x)$  として、式(2.4)のラプラス変換をとる。ここで

$$\mathcal{L}\{P(t, x)\} = V(s, x) \quad (2.5)$$

とし、 $V(s, x)$  を  $V$  と略記すれば

$$sV - D \frac{d^2 V}{dx^2} = P_0(x) \quad (2.6)$$

となる。ここで  $s$  は定数とし、 $x$  のみを変数とする。

$P_0(x)=0$  としたときの式(2.6)の基本解は

$$\begin{cases} \exp(-x\sqrt{s/D}) \\ \exp(+x\sqrt{s/D}) \end{cases} \quad (2.7)$$

である。 $s$  は定数であるので、式(2.7)のそれぞれに

$$\begin{cases} \exp(+\xi\sqrt{s/D})/\sqrt{4sD} \\ \exp(-\xi\sqrt{s/D})/\sqrt{4sD} \end{cases} \quad (2.8)$$

をかけたものを解としてとり、次の関数を考える。

$$\Gamma(x, \xi, s) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{4sD}} \exp\{(x-\xi)\sqrt{s/D}\} & x < \xi \\ \sqrt{\frac{1}{4sD}} \exp\{-(x-\xi)\sqrt{s/D}\} & x > \xi \end{cases} \quad (2.9)$$

ここで  $\Gamma(x, \xi, s)$  を  $\Gamma$  と略記すると、 $x \neq \xi$  以外では  $s\Gamma - D\Gamma'' = 0$  となる。 $x = \xi$  では  $\Gamma$  は連続であるが、 $\Gamma'$  は不連続で

$$\left(\frac{d\Gamma}{dx}\right)_{x=\xi+0} - \left(\frac{d\Gamma}{dx}\right)_{x=\xi-0} = -\frac{1}{D} \quad (2.10)$$

となる。これらにより

$$s\Gamma - D \frac{d^2 \Gamma}{dx^2} = \delta(x - \xi) \quad (2.11)$$

となるので、式(2.6)の解として

$$V(s, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, \xi, s) P_0(\xi) d\xi \quad (2.12)$$

が求まった。

式(2.12)の逆変換をとって、解  $P(t, x)$  を求める。そのために  $\Gamma(x, \xi, s)$  の逆変換を求めると、 $x < \xi$ ,  $x > \xi$  の両方の場合がともに

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Gamma(x, \xi, s)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2Dt}} \exp\{-(x-\xi)^2/4Dt\} \quad (2.13)$$

となる。これを使って  $P(t, x)$  は

$$P(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-(x-\xi)^2/4Dt\} P_0(\xi) d\xi \quad (2.14)$$

となる。

ここで拡散の初期位置が1点  $\xi=0$  であったとする。これは1点集中の分布とも考えられ、 $P_0(\xi) = \delta(\xi)$  となることである。これを式(2.14)に代入すれば

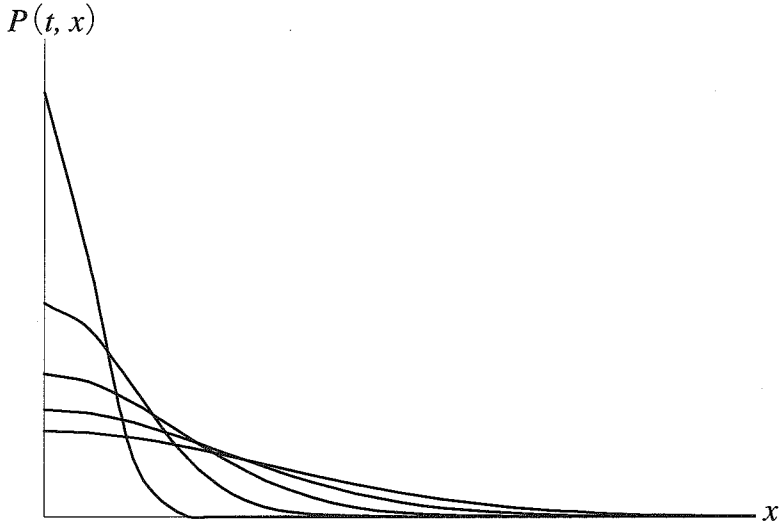
$$P(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2Dt}} \exp(-x^2/4Dt) \cdot P_0(0) \quad (2.15)$$

が得られる。これは1次元  $x$  上の分布と考えたとき、平均0、分散  $2Dt$  なる正規分布の密度に、初期密度  $P_0(0)$  をかけたものである。計算例を第2—1図に示す。

次にロジスティック・モデルを導入する(常盤, 2004a)。 $P(x, t)$  は、地点  $x$  で  $t$  時点における個体の密度を表すものとする。個体は内的自然増加率  $a$  で増殖し、最大密度である飽和値  $P_\infty$  で飽和するものとする。ここで拡散がないものとする、個体密度  $P$  は

$$\frac{dP}{dt} = aP \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) \quad (2.16)$$

という微分方程式で表される。これがロジスティック・モデルである。



第 2-1 図 拡散の例

式(2.16)を拡散方程式と合わせると

$$\frac{\partial P}{\partial t} = aP\left(1 - \frac{P}{P_{\infty}}\right) + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

という拡散ロジスティック・モデルを得る。拡散方程式(2.4)を解くときには、個体が1点に集中した状態であると仮定した。しかし、一定の初期分布が与えられた場合、式(2.17)は陽に解くことができない。そこで、数値計算によって解を求めることにする。

ここからは松本(1999, pp.135~145)の解説に従って話を進める。拡散方程式、式(2.4)は、1次元の非定常熱伝導方程式とまったく同一である。そのとき  $D$  は「熱拡散率」または「温度伝導度」と呼ばれる材質定数である。計算する区間は有限であるとする、座標  $x$  は  $x=0$  の左端から  $x=L$  の右端までの値を取るものとする。するとその両端が境界となり、それぞれの境界点で温度が与えられているものとする。

ここで偏微分方程式を差分化する。まず1次元空間の領域  $0 \leq x \leq L$  を、一定の間隔で  $n$  個の区間に分割する。分割区間の幅を  $\Delta x$ 、分割点の座標を  $x_i$  と記すことにする。すると

$$x_i = i\Delta x \quad (i=0, \dots, n), \quad \Delta x = L/n \quad (2.18)$$

となる。さらに区間  $i$  における  $P$  の値を  $P_i$  と記すことにする。

方程式の空間に関する2階偏微分係数を、中心差分で近似すると次の式が得られる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} \simeq \frac{D}{\Delta x^2} (P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}) \quad (2.19)$$

よって

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{D}{\Delta x^2} (P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}) \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (2.20)$$

となる。

境界点の値  $P_0$ , 及び  $P_n$  は与えられているものとしたので、この問題は  $P_i$  ( $i=1, \dots, n-1$ ) を未知変数とする連立常微分方程式となる。式(2.20)の時間に関する微分係数を前進差分で近似する。

$$P_{i,k+1} - P_{i,k} = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (P_{i-1,k} - 2P_{i,k} + P_{i+1,k}) \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (2.21)$$

ここで  $\Delta t$  は時点間隔であり、2番目の添え字  $k$  は、時点ステップが  $t_k$  の時の値であることを示す。これより、第  $k$  ステップの温度分布  $P_{i,k}$  まで計算できているとすると、第  $k+1$  ステップにおける温度  $P_{i,k+1}$  は次の漸化式で計算できる。

$$P_{i,k+1} = rP_{i-1,k} + (1-2r)P_{i,k} + rP_{i+1,k} \quad (2.22)$$

ここで

$$r = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \quad (2.23)$$

である。

式(2.23)の右辺は既知の値だけで表される、陽公式と呼ばれるものである。陽公式では不安定な現象が生じないように、 $r$  の値を小さな値に制限する。すなわち

$$r \leq \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad D\Delta t \leq \frac{1}{2}\Delta x^2 \quad (2.24)$$

とする。

次にロジスティック・モデルを導入する。拡散ロジスティック・モデルは

ロジスティック・モデルと拡散方程式の1次結合なので、別個に数値計算法を導入することができる。そこで、ロジスティック・モデルはルンゲ・クッタ法で計算する（三井・他, 2004, pp. 7～11; Cartwright・Piro, 1992）。アルゴリズムの詳細は常盤（2006）に記したので、結果だけを示す。

拡散方程式と同様に、区間  $i$  の個体密度を  $P_i$  とし、時点間隔を  $\Delta t$  とする。すると2段のルンゲ・クッタ法の解は、途中の値を  $P'$  として

$$P' = P_{i,k} + 0.5\Delta t \cdot aP_{i,k} \left(1 - \frac{P_{i,k}}{P_\infty}\right) \quad (2.25)$$

とおき

$$P_{i,k+1} = P_{i,k} + \Delta t \cdot aP' \left(1 - \frac{P'}{P_\infty}\right) \quad (2.26)$$

と求まる。

式(2.22)と式(2.26)を合成する。 $P_{i,k}$  は右辺に2度現れているので、重複を除くと

$$P_{i,k+1} = P_{i,k} + \Delta t \cdot aP' \left(1 - \frac{P'}{P_\infty}\right) + rP_{i-1,k} - 2rP_{i,k} + rP_{i+1,k} \quad (2.27)$$

となる。

### 3. シミュレーションとパラメータの推定

離散型の拡散ロジスティック・モデルが導出できたので、はじめに式(2.27)を用いてシミュレーションを行う。まず1次元空間については  $0 \leq x \leq 10$  とし、簡略化のために区間数  $n=10$ ，すなわち  $\Delta x=1$  とする。次に時点についても  $0 \leq t \leq 10$  とし、 $\Delta t=1$  とする。したがって  $r=D$  となる。初期分布は、各区間に固体が独立かつランダムに存在するものとする。このとき、各区間の個体数はポアソン分布となる（Pielou, 1969, pp.85）。単位区間あたりに  $P$  個の個体が存在する確率  $\Pr(P)$  は

$$\Pr(P) = \frac{\lambda^P e^{-\lambda}}{P!} \quad (3.1)$$

と表される。 $\lambda$  は平均である。このポアソン分布に従う乱数、すなわちポアソン乱数を発生させるためには、縄田の Excel によるプロシージャ（縄田，

2000, pp.137~138) を用いた。

境界点の値である区間1と区間10はロジスティック・モデルのみで増加するものとし、それ以外は式(2.27)で計算する。パラメータの値は次のようにした。

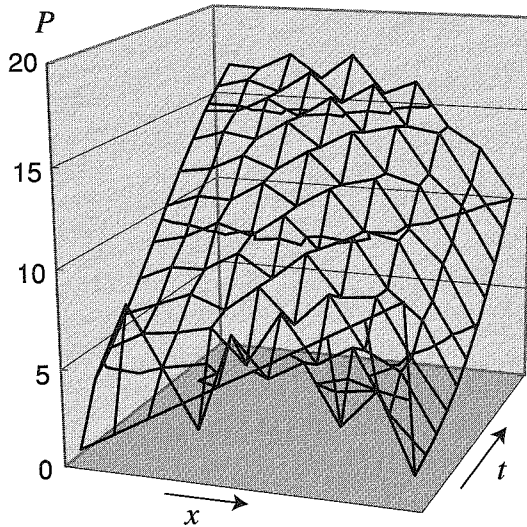
内的自然増加率  $a=0.3$

飽和値  $P_{\infty}=20$

拡散係数  $D=0.5$

ポアソン分布の平均値  $\lambda=5$

計算結果のグラフを第3-1図に示す。



第3-1図 シミュレーションの結果

上述のパラメータを、重回帰分析で推定する方法を考える。 $\Delta x=1, \Delta t=1$ として、式(2.27)についてルンゲ・クッタ法を用いず、単純に差分法して整理すると

$$P_{i,k+1} - P_{i,k} = aP_{i,k} \left( 1 - \frac{P_{i,k}}{P_{\infty}} \right) + D(P_{i-1,k} - 2P_{i,k} + P_{i+1,k}) \quad (3.2)$$

となる。

以前に述べたように(常盤, 2004a; 常盤, 2006)微分方程式の傾きが  $P_{i,k+1}$



$-P_{i,k}$  となるのは、平均値の定理（小林・他，2005，p.103）により  $k$  と  $k+1$  の間にある。そこで右辺のロジスティック・モデルの項にある  $P_{i,k}$  を

$$\hat{P} = \frac{P_{i,k+1} + P_{i,k}}{2} \quad (3.3)$$

と置き換える。すると式(3.2)は

$$\frac{P_{i,k+1} - P_{i,k}}{\hat{P}} = a - \frac{a}{P_{\infty}} \hat{P} + D \frac{1}{\hat{P}} (P_{i-1,k} - 2P_{i,k} + P_{i+1,k}) \quad (3.4)$$

となる。

式(3.4)を重回帰式にするため、以下のように置き換える。

$$\frac{P_{i,k+1} - P_{i,k}}{\hat{P}} \Rightarrow Y$$

$$\hat{P} \Rightarrow X_1$$

$$\frac{1}{\hat{P}} (P_{i-1,k} - 2P_{i,k} + P_{i+1,k}) \Rightarrow X_2$$

$$a \Rightarrow A_0$$

$$-\frac{1}{P_{\infty}} \Rightarrow A_1$$

$$D \Rightarrow A_2$$

すると式(3.4)は

$$Y = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 \quad (3.5)$$

となり、重回帰式を得る。

重回帰分析によるパラメータの推定が有効かどうか、第3—1図に示した計算結果を基にテストデータを作成する。作成方法は以前にも述べたので(常盤，2004a；常盤，2006)，ここでは簡単に説明する。はじめに  $N(0, 1)$  の標準正規乱数を作成する。拡散ロジスティック・モデルは非負の値をとり、指数関数を主体としたモデルである。そこでテストデータ  $P_{i,k}^*$  は、各区間、各ステップにおいて変動係数（標準偏差／平均） $c$  を一定とした条件で、乱数を使って与える形式で作成する。標準正規乱数から取り出した値を  $x_{i,k}$  とし、計算値を  $P_{i,k}$  とすると

$$P_{i,k}^* = P_{i,k} + c x_{i,k} P_{i,k} \quad (3.6)$$

となる。ここでは、変動係数を3%としてテストデータを作成した。

重回帰分析の結果を第3－1表に示す。重相関係数  $R$  は0.9788と非常に大きい。表に示す誤差率は、 $(\text{推定値} - \text{真の値}) / \text{真の値}$ である。わずか数％の誤差であり、重回帰分析によるパラメータ推定の精度は非常に高いと言える。

第3－1表 パラメータの推定結果

	推定値	真の値	誤差率
内的自然増加率	0.2861	0.3	-4.62%
飽和値	20.2618	20.0	1.31%
拡散係数	0.4674	0.5	-6.52%

## 4. 佐賀市への通勤者数の分析

### 4-1. 対象地域とデータ

本章では拡散ロジスティック・モデルを用いて、佐賀市への通勤者数の分析を行う。対象となる市町村は、以前の論文（常盤，2004b）で2000年時点に佐賀市との近接性が高いと位置づけた次の町とする。

(1) 佐賀郡

諸富町，川副町，東与賀町，久保田町，大和町，富士町

(2) 神埼郡

神埼町，千代田町

(3) 小城郡

小城町，三日月町，牛津町，芦刈町

本稿を書いている時点では市町村合併が進み、新市が誕生しているが、対象となる町の数が多いほど詳細な分析ができるため、2000年時点での地域区分で分析を進める。対象地域の図を第4－1図に示す。



第4-1図 対象地域

ここで用語を次のように定義する。

佐賀市の在住就業者数：佐賀市に常住し、佐賀市で従業する就業者数。

佐賀市の流入通勤者数：他の町に常住し、佐賀市で従業する就業者数。

各町の流出通勤者数：各町に常住し、他の市町村で従業する就業者数。

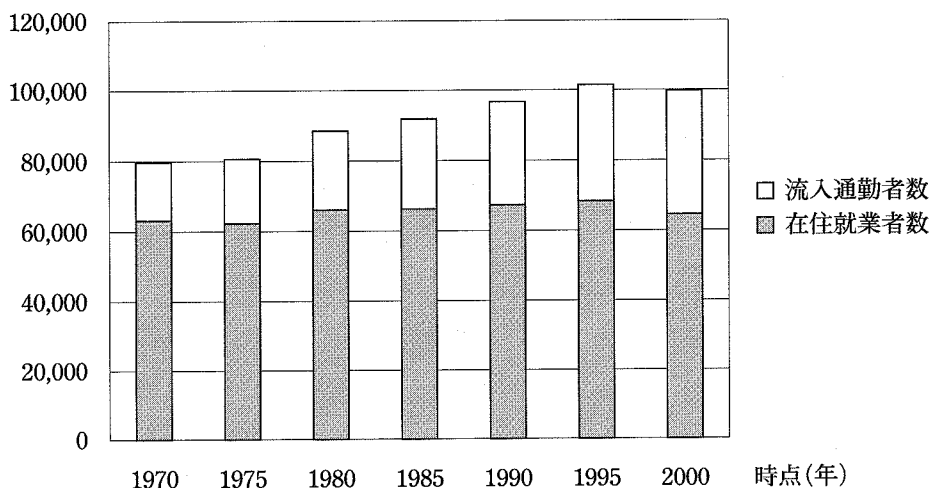
佐賀市への通勤者数：他の町に常住し、佐賀市で従業する就業者数。

これらのデータを国勢調査報告から収集した。なお、密度を求めるために、各市町の面積もデータとした。時点は、通勤者のデータが入手できた1970年

から2000年までの7時点とした。

ここでデータを一覧する。第4－2図は、佐賀市の在住就業者数と流入通勤者数の時間的変化を積み重ね棒グラフで表したものである。双方を足すと、佐賀市で従業する就業者数（従業就業者数）となる。従業就業者数は増加が続き、2000年でやや減少している。ところが在住就業者数はほとんど変化がなく、従業就業者数の増加は流入通勤者数の増加をもたらしていることが分かる。

就業者数(人)



第4－2図 佐賀市の就業者数の変化

次に、対象地域から佐賀市への通勤者数の変化を第4－1表に示す。全域で通勤者数が増加している。また、佐賀市の流入通勤者数に対する、対象地域内の通勤者数の合計の割合を見ると、ほぼ60%で推移している。これは、対象地域が通勤圏の大部分を包含していることを示す。

第4—1表 対象地域から佐賀市への通勤者数の変化

町 名	時 点						
	1970年	1975年	1980年	1985年	1990年	1995年	2000年
諸富町	884	834	958	1,156	1,250	1,358	1,365
川副町	1,583	1,614	1,880	2,276	2,572	2,703	2,623
東与賀町	733	798	966	1,057	1,188	1,261	1,471
久保田町	720	770	884	961	996	1,212	1,414
大和町	2,136	2,371	2,914	3,393	3,855	4,257	4,259
富士町	187	279	341	371	361	362	317
神埼町	1,005	1,099	1,396	1,478	1,609	1,864	2,005
千代田町	1,149	1,262	1,341	1,475	1,561	1,522	1,649
小城町	791	914	1,192	1,372	1,648	1,849	2,019
三日月町	492	612	857	964	1,113	1,313	1,618
牛津町	484	562	739	922	1,137	1,450	1,473
芦刈町	291	354	455	567	683	723	716
合計	10,455	11,469	13,923	15,992	17,973	19,874	20,929
佐賀市の流入通勤者数	16,568	18,343	22,475	25,716	29,368	33,149	35,262
対象地域内の割合	63.1%	62.5%	61.9%	62.2%	61.2%	60.0%	59.4%

#### 4-2. 拡散ロジスティック・モデルと通勤者数の増加

拡散ロジスティック・モデルと通勤者数の増加との関係について考察する。通勤者の発生には2通りある。1つは、周辺市町村に常住する者が中心都市で従業することになる場合である。具体的には就職・転職と考えることができる。もう1つは、中心都市に常住している就業者が、従業地をそのままにして、他の市町村に転出する場合である。なお、これらを分類したデータは存在しない。

拡散ロジスティック・モデルの式を再掲する。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = aP \left( 1 - \frac{P}{P_{\infty}} \right) + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

右辺には2つの項がある。第1項はロジスティック・モデルであり、第2項は拡散である。第1項は中心都市への就職・転職という増加と関連付けることができる。第2項は中心都市から周辺市町村への転出と関連付けることができる。右辺は線形結合であるため、第1項、第2項のそれぞれの変化量が

計算でき、分析、予測を行うことができる。

ここで1つ注意しなければならない点がある。拡散は、個体がランダムウォークをするという前提で起きているのであるが、中心都市への通勤者の常住地が転々と変わるといことは考えにくい。この点は、時間が経過するにつれて、より遠方に転出することになると解釈すべきであろう。

#### 4-3. 通勤圏の密度空間への変換

通勤者の増加を拡散の概念に結びつけるためには、中心都市である佐賀市と周辺の町との距離を算出しなければならない。単純には佐賀市の中心と各町の中心を直線で測ればよいのであるが、どこが中心であるかという点と、交通路の状況が反映されていないため、この方法には問題がある。そこで筆者が考案した距離の算出方法（常盤，2004b）を用いる。

算出に使うのは引力モデルである。 $i$ を各町とし、佐賀市への通勤者数を  $T_i$  (Trip)、佐賀市の流入通勤者数を  $D$  (拡散係数と記号が重複するが、ここでは Destination の意味である)、各町の流出通勤者数を  $O_i$  (Origin)、佐賀市と各町の距離を  $d_i$  とすると、引力モデルでは次のように示される。

$$T_i = G \frac{O_i D}{d_i} \quad (4.2)$$

なお、 $G$  は係数である。

式(4.2)では、 $T_i$ 、 $O_i$ 、 $D$  が既知であるので次のように変形できる。

$$d_i = G \frac{O_i D}{T_i} \quad (4.3)$$

これにより、佐賀市と各町の距離が算出できる。ところで通勤者数の広域的な増加（通勤流動化）が進むと、分母の増加より分子の増加のほうがはるかに大きくなるため時点間の整合性が取れない。そこで、距離は時点ごとに標準化することにした。すなわち、一旦  $G$  を1として距離を計算する。これを  $\hat{d}_i(t)$  とする。そして時点ごとにその平均  $\bar{d}(t)$  を求める。 $n$  を町の数とすると

$$\bar{d}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{d}_i(t) \quad (4.4)$$

となる。これを用いて、標準化した  $d_i(t)$  を

$$d_i(t) = \frac{\hat{d}_i(t)}{\bar{d}_i(t)} \times 100 \quad (4.5)$$

とする。計算結果を第4-2表に示す。

第4-2表 対象地域から佐賀市への距離

町 名	時 点						
	1970年	1975年	1980年	1985年	1990年	1995年	2000年
諸富町	94.4	111.8	127.3	120.5	124.3	120.0	115.5
川副町	71.1	80.3	78.4	79.4	79.5	80.2	80.1
東与賀町	65.8	66.4	67.1	68.3	70.9	72.2	71.9
久保田町	70.3	72.4	73.7	74.6	76.5	78.2	78.2
大和町	66.3	64.3	67.1	68.6	70.1	72.0	71.8
富士町	84.2	93.4	96.1	100.0	103.5	98.0	102.6
神埼町	135.8	137.1	128.4	130.7	130.5	128.4	129.2
千代田町	103.7	104.5	107.8	111.4	116.7	120.5	115.8
小城町	113.3	112.8	104.7	108.7	106.5	113.2	114.8
三日月町	136.6	125.6	116.4	114.0	105.0	101.3	99.0
牛津町	116.0	107.8	105.3	101.5	100.6	101.4	105.4
芦刈町	142.5	123.5	127.6	122.2	115.9	114.6	115.7

この距離を用いて通勤圏を1次元空間に変換する。もっともシンプルなのは、各距離にある町の佐賀市への通勤者数を離散分布として与える方法であるが、拡散は密度分布の上で起こるので、離散分布を連続分布にしなければならない。その場合、いくつかの問題がある。

まず第1は、式(4.5)で計算した距離は相対的な距離であって、2次元空間上で実測した距離ではない。そのため、各町の面積とは整合性が取れない。仮に佐賀市への通勤者数を各町の面積で割って密度にしたとしても、その密度が分布する1次元上の区間がどの範囲になるか定まらない。

第2は、各町の区間の重層化、あるいは空白区間の発生の問題である。何らかの方法で区間を計算したとしても、1次元上で各町の区間が重なり合ってしまうと、その部分だけ密度が大きくなる場合が想定される。また、まったく重なり合わない、密度がゼロの区間が発生する恐れがある。

第3は、抽象化された1次元空間で計算した予測結果が、実際の各町の密度、あるいは実数値へ戻せないことである。

以上から、拡散の起こる密度分布の1次元空間を、上記の3つの問題を考慮して次のように定めることにした。まず各町を、佐賀市からの距離に応じて順位をつける。ここで順位は時点によって変わらないものと仮定する。この点を検証する。用いるのは Spearman の順位相関係数である（小林・他, 2005, pp.288～289）。1, 2, …,  $n$  を  $n$  個の町の番号とし,  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  を前時点の町に付けられた順位,  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  を後時点の町に付けられた順位とする。このとき順位相関係数  $\rho$  は次の式で計算できる。

$$\rho = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2 \quad (4.6)$$

両者の順位がまったく一致しているとき、順位相関係数は1、完全に逆順ならば-1、両者の順位に共通性がまったくないときはゼロとなる。各時点間で計算した結果を第4-3表に示す。順位相関係数の値はきわめて高く、順位が時点によって変わらないとみなせる。よって順位は2000年の順位で固定することにする。

第4-3表 時点間の順位相関係数

期 間	相関係数
1970年対1975年	0.9301
1975年対1980年	0.9231
1980年対1985年	0.9860
1985年対1990年	0.9371
1990年対1995年	0.9720
1995年対2000年	0.9860

次に、各町の佐賀市への通勤者数の密度を計算する。順位を  $s$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) とし、各町の面積を  $A_s$  とする。すると密度  $P(t, s)$  は、時点別の各町の佐賀市への通勤者数を  $T(t, s)$  として

$$P(t, s) = T(t, s) / A_s \quad (4.7)$$

となる。

ここで区間の幅を1とし、区間の左端には佐賀市の在住就業者密度を置く。これを  $P(t, 0)$  とする。これは、佐賀市の在住就業者が拡散するという前提に基づくものである。そして各町を順位に沿って左から右に並べる。次に右端



の値を  $P(t, n)$  として境界値とする。 $P(t, 0)$  は観測値とし、 $P(t, n)$  はロジスティック・モデルでのみ増加するものとする。いささか荒っぽい方法であるが、これにより矛盾なく、かつ各町と区間に 1 対 1 対応を付けて計算が可能となる。

#### 4-4. 重回帰分析と推定

はじめに、全時点・全町でパラメータが同一であるとして重回帰分析を行った。その結果を第 4-4 表に示す。重相関係数は 0.3675 と値が小さい。

第 4-4 表 重回帰分析の結果(1)

重相関係数	内的自然増加率	飽和通勤者密度 (人/㎢)	拡散係数
0.3675	0.2071	153.75	-0.003089

そこでパラメータは町ごとに異なるものとした。すなわち、 $s$  を各町の順位として  $a(s)$ ,  $P_{\infty}(s)$ ,  $D(s)$  とし、個別に重回帰分析を行った。結果を第 4-5 表に示す。地域区分の町の並びは順位に沿ったものである。重回帰分析の性質上、最下位の神埼町は入っていない。なお、飽和通勤者数は密度ではなく実数(人)である。重相関係数の値は総じて大きく、0.5以下なのは川副町だけである。

ただし、現実的ではない値が若干ある。久保田町の内的自然増加率と、三日月町、牛津町の飽和通勤者数である。これらについては、拡散の項を外して単回帰分析を行ったが、重相関係数の値が著しく小さくなった。したがって、拡散の影響が強く現れたものと考えられる。拡散係数の符号は、隣接する町との関係で定まるので、それ自体に格段の意味はない。

第4—5表 重回帰分析の結果(2)

地域区分	重相関係数	内的自然増加率	飽和通勤者数	拡散係数
大和町	0.9554	2.4673	6,393	-0.1047
東与賀町	0.6983	0.5484	2,126	0.7584
久保田町	0.7472	-0.0237	127	0.1633
川副町	0.4038	0.2850	2,428	0.2202
三日月町	0.5066	0.3134	-4,752	0.2442
富士町	0.9855	1.1916	486	-0.0066
牛津町	0.9963	1.5249	-14,673	1.0438
小城町	0.7877	0.6120	5,016	-0.0892
諸富町	0.9928	1.5210	4,565	0.8369
芦刈町	0.9661	1.3501	992	-0.1702
千代田町	0.7398	1.1910	2,032	0.3681

(2)の、町別のパラメータを用いて推定値を計算した。佐賀市の在住就業者密度は観測値とし、右端の神埼町の通勤者密度はロジスティック・モデルのみで回帰分析を行って推定値を計算した。ところが、計算結果は観測値と大きくかけ離れてしまった。最大で数万倍もの乖離した値が表示された。これは、重相関係数の値こそ大きいものの、パラメータの町別分布の値は極めてクリティカルであり、わずかな誤差が推定値を大きく不安定にしていることが伺える。

そこで(1)の、全時点・全町でパラメータを同一とした値で推定値を計算した。今度は値が安定し、観測値に近い値が表示された。推定値の精度を以下の式で求める。まず誤差率  $u(t, s)$  を次の式で求める。

$$u(t, s) = \frac{\text{推定値} - \text{観測値}}{\text{観測値}} \quad (4.8)$$

次に、標準偏差と同じ考え方で平方和を求め、時点数  $m$  と町の数  $n$  の和で割り、平方根を取って平均誤差率  $\bar{u}$  を求める。

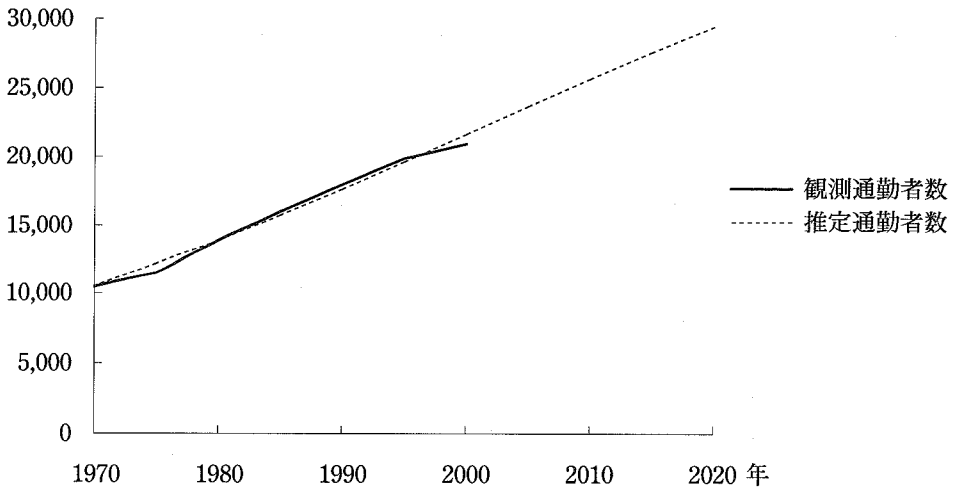
$$\bar{u} = \sqrt{\frac{1}{m+n} \sum_{t=1}^m \sum_{s=1}^n \{u(t, s)\}^2} \quad (4.9)$$

結果は35.87%と多少大きい値である。しかしながら、重相関係数の値が小さいことを考慮すれば、まずまずの精度であることが分かった。

#### 4-5. 分析と予測

個別の推定結果は今一つの精度であるが、ボトムアップした総量とすれば精度はかなり上昇する。第4-3図に、対象地域から佐賀市への通勤者総数の推移を示す。佐賀市の在住就業者数は、1970年～2000年は観測値を用いた。2000年～2020年は、1970年～2000年の平均値を用いた。また、境界値の神埼町の推定値は、ロジスティック・モデルのみで回帰分析を行い、1970年～2020年の値を計算した。観測値と推定値は重なり、予測では今後も通勤者数の増加が見込まれ、2020年時点では約3万人となる。対象地域内の総数が、佐賀市の流入通勤者数の約60%で安定していることを考えれば、佐賀市の流入通勤者数は2020年に5万人に達するものと考えられる。

通勤者数(人)



第4-3図 対象地域から佐賀市への通勤者総数の予測

次に、本研究の目的である、佐賀市で従業・常住していた就業者の内、常住地を他の町へ移した人数（以下、転出者数）の分析と予測を行う。これは、先に式(4.1)で示したように、拡散ロジスティック・モデルの右辺第2項である。これも各町ごとに計算した。計算値には負のものもある。拡散は、散らばり方によって正負いずれの符号も出現し得る。そこで、各計算値の絶対値を取ってボトムアップした。計算結果を第4-6表に示す。

第4—6表 拡散による変動の推計結果

期 間	拡散による変動 (人) a	通勤者の増加量 (人) b	比 率 a / b
1970～1975年	152	1,014	14.9%
1975～1980年	158	2,454	6.4%
1980～1985年	172	2,069	8.3%
1985～1990年	182	1,981	9.2%
1990～1995年	192	1,901	10.1%
1995～2000年	202	1,055	19.2%
計	1,058	10,474	10.1%
2000～2005年	204	2,036	10.0%
2005～2010年	213	2,002	10.7%
2010～2015年	220	1,936	11.4%
2015～2020年	227	1,840	12.3%
計	864	7,814	11.1%

表中の「拡散による変動」が推計した転出者数である。「通勤者の増加量」は対象地域から佐賀市への通勤者の総数について、各期間の増加量を計算したものである。なお、1970～2000年までは観測通勤者数を用い、2000～2020年までは推定通勤者数を用いた。

転出者数の推定は、これまで田中(2000, pp.73～77)が主成分分析で試みているが失敗している。したがって本研究が初の成功例である。平均誤差率の関係で、表の比率(転出者数の割合)の有効桁数は1～2桁と考えられる。約10%程度で微増している。このことは何を意味するのであろうか。

巨大都市圏では中心部を巨大なC.B.D.(中心業務地区)が占め、従業地と常住地の住み分けが進行している。地価の高騰や住宅地の不足によって、C.B.D.内の従業者は、遠い所では片道2時間以上もの通勤を強いられている。それに対し、地方都市である佐賀市は、市内にまだ宅地化可能な土地が豊富にあり、それが転出者数の比率約10%という数字に現われている。

したがって、佐賀市内での産業成長による就業者の増加の多くは、近隣市町村からの就職・転職をもたらしている。しかし、それらの就業者は佐賀市内に転入してこない。佐賀市の在住就業者数が変化しないことがそれを物語っている。その原因として考えられるのは、すでに近隣市町村に住居を構えているものが、敢えて、より地価の高い佐賀市内には転入しないだろうと

いうことである。

通勤者数の増大は、地方都市にありがちな公共交通機関の衰退によって、自家用車による通勤を増加させる。これはガソリン消費量の増加による二酸化炭素の排出増、道路の渋滞、無駄な通勤時間の増加を引き起こす。本来、自転車通勤が主流だったコンパクトシティ佐賀が、変化を続けている。これは看過できない状態である。

佐賀市内の産業成長は、これからもゆっくり続くであろう。それは集積の利益という経済的な有利さが主因と思われる。かといって、産業を周辺に分散させたからといって、通勤圏が狭まるわけではない。その点は以前論じた（常盤，1985）。産業の分散は複雑な通勤圏を形成させ、通勤者数は決して減少しない。

結論として言えることは、公共交通機関を充実させ、自家用車による通勤の増加に何らかの形で歯止めを掛けるしかない。それ以上の分析や提言は本研究の枠を超えるので、ここまでとしておく。

## 5. まとめ

社会現象の分析に数理モデルを用いるのは、原データからではわからない値の推計や、将来予測を行うためである。本研究では、主に数理生態学で用いられていた拡散ロジスティック・モデルを通勤者数の分析に用いることによって、通勤者数の増加の中の転出者数を推計しようと試みた。

研究の当初は、クリティカルな拡散ロジスティック・モデルが重回帰分析に耐えられるかという懸念があった。しかし、数値計算法を次々と改良することにより、安定で、かつ原データに近い推定値を得ることができ、目的である転出者数の推計ができた。

平成の大合併が進む中で、広大な行政面積を持つ自治体が増加している。そのため、見かけ上は市町村間の通勤者数が減少する。しかしながら、通勤者数の把握は道路や公共交通機関の整備のためには無くてはならないことである。この場合、合併後の自治体の就業者数から、旧市町村という小さい区割りの通勤者数へのブレイクダウンによる推計が必要となる。その点を今後

の課題としてこの稿を終える。

### 参考文献

- 石水照雄・奥野隆史 (1973):『計量地理学』共立出版。
- 岩崎 学 (2004):『統計的データ解析のための数値計算法入門』朝倉書店。
- 宇野利雄・洪 妊植 (1974):『ラプラス変換』共立出版。
- 大久保明 (1975):『生態学と拡散』築地書館。
- 大久保明 (1979):数理生態学と拡散理論, 数理科学, no.198, pp.13~18.
- 太田邦昌 (1975):生態学と拡散モデル—絶滅と存続の生態学, 数理科学, no.146, pp. 58~64.
- 奥野忠一・久米 均・芳賀敏郎・吉澤 正 (1971):『多変量解析法』日科技連。
- 川崎広吉 (1978):拡散と空間分布の形成, 数理科学, no.183, pp.47~52.
- 楠田哲也・巖佐 庸 (2002):『生態系とシミュレーション』朝倉書店。
- 小林幹雄・福田安蔵・鈴木七緒・安岡善則・黒崎千代子共編 (2005):『新装版 数学公式集』共立出版。
- 杉浦芳夫 (1989):『立地と空間行動』古今書院。
- 洲之内治男・石渡恵美子 (2002):『数値計算 [新訂版]』サイエンス社。
- 高橋健人 (1961):『差分方程式』培風館。
- 田中和子 (2000):『都市空間分析』古今書院。
- 戸川隼人 (1976):『数値解析とシミュレーション』共立出版。
- 常盤洋一 (1985):東京大都市地域の通勤移動を中心にした人口動態の基礎研究, 東京工業大学博士論文。
- 常盤洋一 (2004a):ロジスティック成長モデルのパラメータ推定, 佐賀大学経済論集, vol. 36, no. 5, pp. 1~19.
- 常盤洋一 (2004b):佐賀県における通勤移動の分析, 佐賀大学経済論集, vol.37, no. 4, pp. 97~122.
- 常盤洋一 (2006):多変数ロジスティック・モデルの開発と応用, 佐賀大学経済論集, vol. 38, no. 1, pp. 1~24.
- 縄田和満 (2000):『Excel による統計入門 (第2版)』朝倉書店。
- 福島雅夫 (2001):『非線形最適化の基礎』朝倉書店。
- 松本絃美 (1999):『コンピュータによる実践数値計算法』九州大学出版会。
- 三井斌友・小藤俊幸・齋藤善弘 (2004):『微分方程式による計算科学入門』共立出版。
- 三村昌泰 (1978):拡散とパッチネス, 数理科学, no.183, pp.29~33.
- 三村昌泰 (1979):生物の増殖と空間分布—特異摂動法を用いて—, 山口昌哉編:『非線形の現象と分析』日本評論社, pp.55~80.
- Cartwright, J.H.E, Piro, O. (1992): The Dynamics of Runge-Kutta Methods, *Int. J.*

- Chaos* vol.2, pp.427~449.
- Chatterjee, S., Price, B. (1977): *Regression Analysis by Example*, New York, John Wiley & Sons, Inc. (邦訳) 佐和隆光・加納 悟訳 (1971): 『回帰分析の実際』新曜社.
- Fletcher, R. (ed.) (1969): *Optimization*, London and New York, Academic Press Inc.
- Guttman, I., Wilks, S.S. (1965): *Introductory Engineering Statistics*. New York, John Wiley & Sons, Inc. (邦訳) 石井恵一・堀 素夫訳 (1968): 『工科系のための統計概論』培風館.
- Hsgerstrand, T. (1953): *Innovationsforloppet ur Korologisk Synpunkt*. C.W.K. Gleeup.
- Jacoby, S.L.S., Kowalik, J.S., Pizzo, J.T. (1972): *Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems*, New Jersey, Prentice-Hall Inc. (邦訳) 関根智明訳 (1976): 『非線形最適化問題の反復解法』培風館.
- Naylor, T.H., Balintfy, J.L., Burdick, D.S., Chu, K. (1966): *Computer Simulation Techniques*, New York, John Wiley & Sons, Inc. (邦訳) 水野幸男・小柳芳雄訳 (1971): 『コンピュータ シミュレーション』培風館.
- Pielou, E.C. (1969): *An Introduction to Mathematical Ecology*, New York, John Wiley & Sons, Inc. (邦訳) 南雲仁一監訳・合田周平・藤村貞夫訳 (1974): 『数理生態学』産業図書.